

## 12. 7. ODCHYLENIE STANDARDOWE

### Wariancja i odchylenie standardowe

- a) Wariancja nazywamy średnią arytmetyczną kwadratów odchyleń od średniej arytmetycznej.

Wariancję liczb  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  liczymy ze wzoru

$$\delta^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

- b) Odchyleniem standardowym nazywamy średnią kwadratową odchyleń od średniej arytmetycznej.

Odchylenie standardowe liczb  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  liczymy ze wzoru

$$\delta = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

Przykład 12.7.1. Oblicz wariancję i odchylenie standardowe poniższych danych

( odchylenie standardowe podaj z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku) :

- a) 1,2,3,4

Rozwiązanie	Komentarz
$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4}{4} = \frac{10}{4} = 2,5$	Obliczamy średnią arytmetyczną danych
$\begin{aligned} \delta^2 &= \frac{(1 - 2,5)^2 + (2 - 2,5)^2 + (3 - 2,5)^2 + (4 - 2,5)^2}{4} = \\ &= \frac{(-1,5)^2 + (-0,5)^2 + (0,5)^2 + (1,5)^2}{4} = \\ &= \frac{2,25 + 0,25 + 0,25 + 2,25}{4} = \frac{5}{4} = 1,25 \end{aligned}$	Obliczamy wariancję danych
$\delta = \sqrt{1,25} \approx 1,12$	Obliczamy odchylenia standardowe danych .

b) 2,2,2,3,3,4,5,5,6,6,6

Rozwiązanie	Komentarz
$\bar{x} = \frac{2+2+2+3+3+4+5+5+6+6+6}{11} =$ $= \frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{11} = \frac{44}{11} = 4$	Obliczamy średnią arytmetyczną danych
$\delta^2 = \frac{3 \cdot (2-4)^2 + 2 \cdot (3-4)^2 + (4-4)^2 + 2 \cdot (5-4)^2 + 3 \cdot (6-4)^2}{11} =$ $= \frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4}{11} = \frac{28}{11} = 2,54$	Obliczamy wariancję danych
$\delta = \sqrt{\frac{28}{11}} \approx 1,60$	Obliczamy odchylenie standardowe danych.

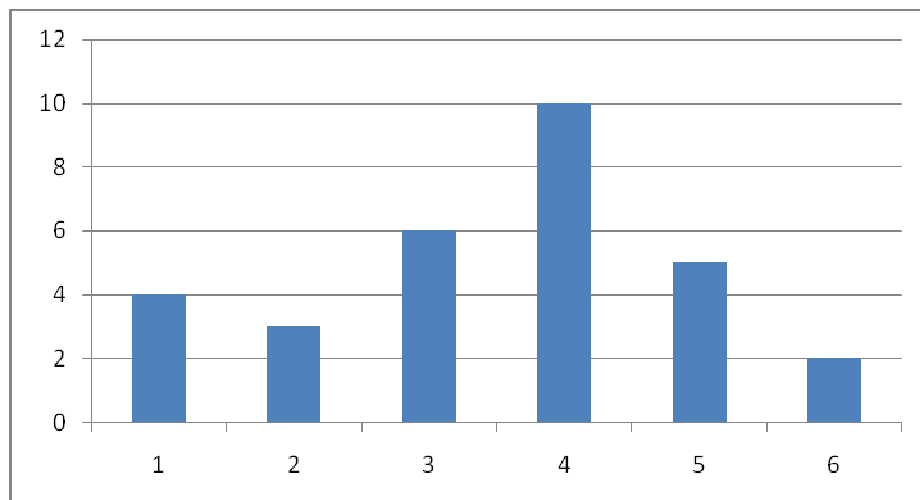
**Przykład 12.7.2.** W tabeli przedstawiono zestawienie ocen semestralnych z matematyki klasy I a.

- Oblicz odchylenie standardowe tych ocen.
- Ilu uczniów otrzymało ocenę różniącą się od średniej ocen o mniej niż odchylenie standardowe ?

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba ocen	2	5	8	8	5	2

Rozwiązanie	Komentarz
$\bar{x} = \frac{2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{2 + 5 + 8 + 8 + 5 + 2} = \frac{105}{30} = 3,5$	Obliczamy średnią arytmetyczną ocen
$\delta = \sqrt{\frac{2(1-3,5)^2 + 5(2-3,5)^2 + 8(3-3,5)^2 + 8(4-3,5)^2 + 5(5-3,5)^2 + 2(6-3,5)^2}{30}} =$ $= \sqrt{\frac{2 \cdot 6,25 + 5 \cdot 2,25 + 8 \cdot 0,25 + 8 \cdot 0,25 + 5 \cdot 2,25 + 2 \cdot 6,25}{30}} =$ $\sqrt{\frac{12,5 + 11,25 + 2 + 2 + 11,25 + 12,5}{30}} = \sqrt{\frac{51,5}{30}} \approx 1,31$	Obliczamy odchylenia standardowe ocen .
$ 1 - 3,5  = 2,5 > 1,31$ $ 2 - 3,5  = 1,5 > 1,31$ $ 3 - 3,5  = 0,5 < 1,31$ - ośmiu uczniów $ 4 - 3,5  = 0,5 < 1,31$ - ośmiu uczniów $ 5 - 3,5  = 1,5 > 1,31$ $ 6 - 3,5  = 2,5 > 1,31$	Obliczamy ilu uczniów otrzymało ocenę różniącą się od średniej ocen o mniej niż odchylenie standardowe
<p><b> Odp.:</b> Ocenę różniącą się od średniej arytmetycznej o mniej niż odchylenie standardowe uzyskało 16 uczniów.</p>	

Przykład 12.7.3. Na diagramie przedstawiono wyniki sprawdzianu z matematyki w pewnej klasie. Oblicz średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe uzyskanych ocen.



Rozwiązanie	Komentarz
$x = \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 6}{4 + 3 + 6 + 10 + 5 + 2} =$ $= \frac{105}{30} = 3,5$	Obliczamy średnią arytmetyczną ocen
$\delta = \sqrt{\frac{4(1 - 3,5)^2 + 3(2 - 3,5)^2 + 6(3 - 3,5)^2 + 10(4 - 3,5)^2 + 5(5 - 3,5)^2 + 2(6 - 3,5)^2}{30}} =$ $= \sqrt{\frac{4 \cdot 6,25 + 3 \cdot 2,25 + 6 \cdot 0,25 + 10 \cdot 0,25 + 5 \cdot 2,25 + 2 \cdot 6,25}{30}} =$ $\sqrt{\frac{25 + 6,75 + 1,5 + 2,5 + 11,25 + 12,5}{30}} = \sqrt{\frac{59,5}{30}} \approx 1,41$	Obliczamy odchylenia standardowe ocen .

## ĆWICZENIA

Ćwiczenie 12.7.1. (2pkt.) Oblicz odchylenie standardowe danych: 5,4,5,7,4,6,4

### schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie średniej arytmetycznej danych	1
2	Podanie odchylenia standardowego z przybliżeniem do trzech miejsc po przecinku.	1

Ćwiczenie 12.7.2. (2pkt.) Wyniki testu podane są w tabeli:

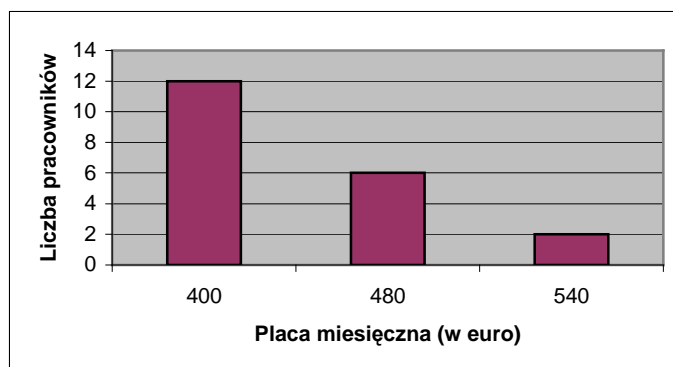
Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba uczniów	2	4	7	9	5	1

Oblicz średnią ocen z testu i ich odchylenie standardowe.

**schemat oceniania**

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie średniej arytmetycznej danych	1
2	Podanie odchylenia standardowego danych z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.	1

Ćwiczenie 12.7.3. (3pkt.) W pewnej firmie pracownicy zostali zaszeregowani do trzech grup uposażeń. Liczbę pracowników i płace ( w euro) w poszczególnych grupach przedstawia diagram słupkowy:



- Wyznacz średnią płacę miesięczną w tej firmie.
- Oblicz wariację i odchylenie standardowe miesięcznej płacy w tej firmie. Odchylenie standardowe podaj z dokładnością do 0,1.

**schemat oceniania**

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie średniej arytmetycznej płac w firmie.	1
2	Podanie wariacji płac w firmie.	
3	Podanie odchylenia standardowego płac firmy z dokładnością do 0,1.	1